

§5.5. Developpements limités. Formule de Taylor.

-174-

Théorème (Formule de Taylor). Soit $f: I \rightarrow F$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur $I \ni a$. Alors $\forall x \in I$ il existe u entre a et x tel que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(f) \text{ Polynome de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{R_n(f) \text{ le reste}}$$

la formule de Taylor.

Idée: Soit f dérivable sur $I \Rightarrow \text{TAF} \forall x, a \in I \exists u$ entre x et a tel que $f'(u) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(a) = f'(u)(x-a) \Leftrightarrow f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{f'(u)}{1}(x-a)}_{\text{formule de Taylor d'ordre 0.}}$$

.... voir [DZ §5.4]

Ex 1. $f(x) = \sin x$ autour de $a=0$; $f(x) = \sin x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \cos x ; f''(x) = -\sin x ; f^{(3)}(x) = -\cos x , f^{(4)}(x) = \sin x \dots$$

$$f'(0) = 1 ; f''(0) = 0 ; f^{(3)}(0) = -1 , f^{(4)}(0) = 0 , \dots$$

$$\sin x = \sin 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x).$$

Ex 2. $f(x) = \cos x$ autour de $a=0$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x)$$

Remarque. La formule de Taylor s'appelle la formule de MacLaurin si $a=0$.

Def. (Développement limité) $f: E \rightarrow F$ une fonction définie au voisinage de $x=a$

S'il existe de nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $\forall x \in E, x \neq a$, on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n E(x),$$

où $E(x)$ est une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow a} E(x) = 0$,

on dit que f admet un développement limité d'ordre n autour de $x=a$.

(DL)

-176-

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n - \text{la partie principale du développement limité (DL)}$$

$$R_n(x) = (x-a)^n \mathcal{E}(x) - \text{le reste du DL.}$$

Proposition. Si $f: E \rightarrow F$ admet un développement limité d'ordre n autour de $x=a$, alors celui-ci est unique.

Dém: Par absurde. Supposons que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}_1(x); \quad \lim_{x \rightarrow a} \mathcal{E}_1(x) = 0$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}_2(x); \quad \lim_{x \rightarrow a} \mathcal{E}_2(x) = 0.$$

Soit k le plus petit tel que $a_k \neq b_k$.

$$\Rightarrow 0 = \frac{\overbrace{f(x) - f(x)}^{=0}}{(x-a)^k} = \underbrace{(a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})(x-a) + \dots + (x-a)^{n-k}(\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x))}_{\xrightarrow{x \rightarrow a} a_k - b_k}$$

$$\downarrow$$

$$0 = \underline{\underline{\hspace{10cm}}}$$

$$\Rightarrow a_k = b_k, \text{ contradiction} \Rightarrow a_i = b_i \quad \forall i = 0 \dots n \Rightarrow \mathcal{E}_1(x) = \mathcal{E}_2(x)$$



Corollaire. Soit $a \in I$; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ fois continûment dérivable sur I . Alors la formule de Taylor nous fournit le DL d'ordre n de la fonction f autour de $x=a$

Dém: Le reste: $\underbrace{f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{= \varepsilon(x)(x-a)^n} \quad \text{Taylor}$
 $= \varepsilon(x)(x-a)^n$ - DL tel que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

$\Rightarrow$ Il faut vérifier que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow a} f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)}{(n+1)!} \stackrel{?}{=} 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)}{(n+1)!} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a} M \frac{(x-a)}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

$$|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M \text{ sur } [a, x] \text{ ou } [x, a]$$

$\leftarrow f^{(n+1)}(x)$ est continue sur $[a, x]$ ou $[x, a] \Rightarrow$ bornée



Remarques (1) En fait, il suffit d'avoir f n fois continûment dérivable sur I pour avoir $f(x) = P_n(x)$ de Taylor $+ (x-a)^n \varepsilon(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

(2) $f: E \rightarrow F$ peut avoir un DL sans que la formule de Taylor lui soit applicable (Voir [DZ] exemple 5.4.9).

Conclusion. Soit $f: I \rightarrow F$ n fois continûment dérivable sur I , $a, x \in I$, $x \neq a$ -178-

Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Si f est $(n+1)$ fois dérivable sur I , alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

u entre
 a et x

C'est le DL de la fonction f d'ordre n autour de $x=a$.

§5.6. Etude des fonctions.

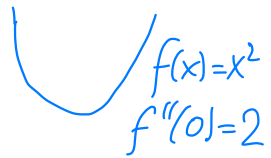
Rappel: Si $f: I \rightarrow F$ est dérivable sur I , et f admet un extremum local en $x=c$, alors $f'(c) = 0$.

Proposition. (Condition suffisante pour qu'une fonction ait un extremum local).

Soit $f: I \rightarrow F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I , ou $n \in \mathbb{N}^*$ est pair et telle que $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, mais $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Alors si $f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow f$ admet un min local en $x=c$

si $f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow f$ admet un max local en $x=c$



$$f(x) = x^2$$

$$f''(0) = 2$$



$$f(x) = -x^2$$

$$f''(0) = -2$$

Dém formule de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $x=c$

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(u)}{n!} (x-c)^n \text{ ou } u \text{ est entre } x \text{ et } c$$

Supposons $f^{(n)}(c) > 0$.

$$\text{Alors } f(x) - f(c) = \underbrace{f^{(n)}(\text{point } u, \text{ proche de } c)}_{\geq 0} \underbrace{\frac{(x-c)^n}{n!}}_{> 0} \geq 0 \quad \forall x \text{ au voisinage suffisamment petit de } c$$

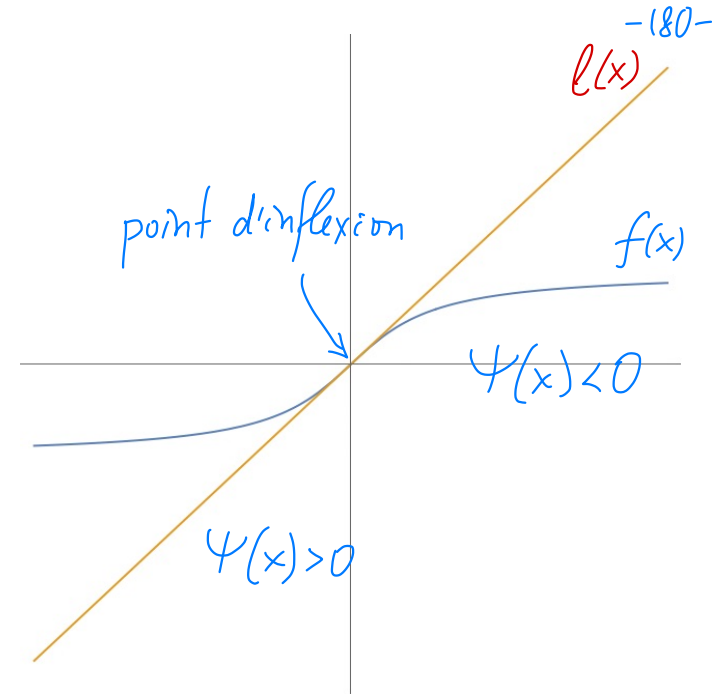
puisque $f^{(n)}(c) > 0$ et $f^{(n)}(x)$ est continue sur $I \Rightarrow f(c)$ est un minimum local. $\square$

Déf. $f: E \rightarrow F$ une fonction dérivable en $a \in E$

Soit $\ell(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ - la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

Considérons $\psi(x) \stackrel{\text{dét}}{=} f(x) - \ell(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

Si $\psi(x)$ change de signe en $x=a$, alors $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f .

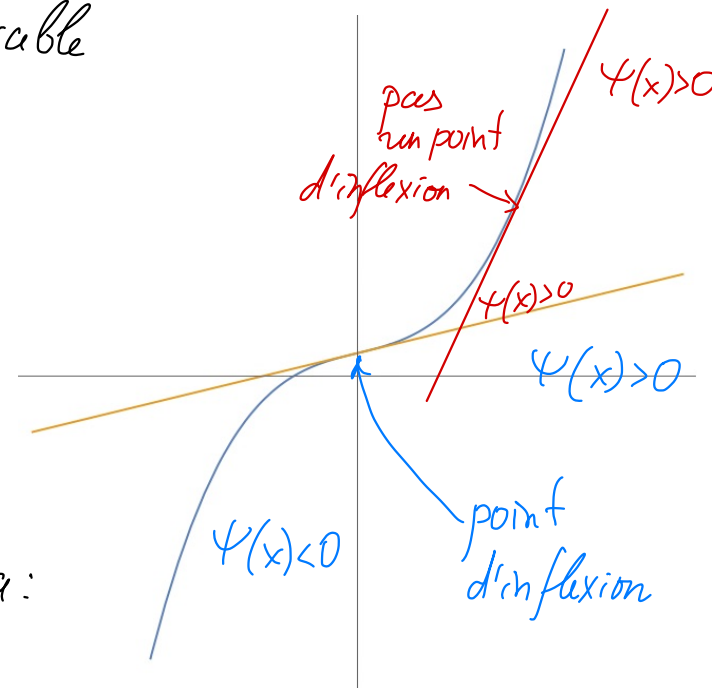


Proposition. (Condition suffisante pour qu'une courbe ait un point d'inflexion).

Soit $f: I \rightarrow F$ une fonction n fois continûment dérivable sur I , où $n \in \mathbb{N}$ est impair, $n > 1$, et on a :

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 ; f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Alors le point $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de f .



Dém: Formule de Taylor d'ordre $(n-1)$ autour de $x=a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + 0 + \dots + 0 + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + 0 + \dots + 0 + f^{(n)}(\eta) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

$$\Psi(x) = f(x) - l(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \underbrace{f^{(n)}(\eta)}_{>0} \underbrace{\frac{(x-a)^n}{n!}}_{\text{impair}}$$

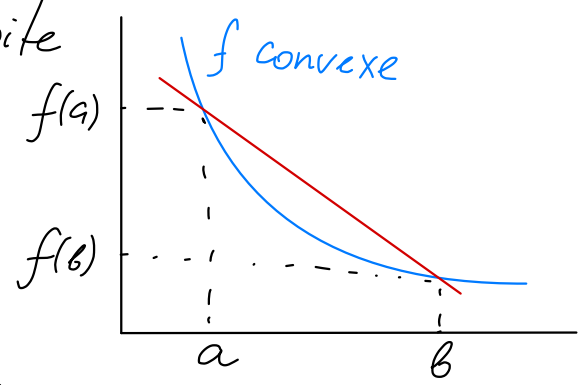
Soit $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f^{(n)}(\eta) > 0$
 puisque $f^{(n)}$ est continue

change de signe en $x=a$

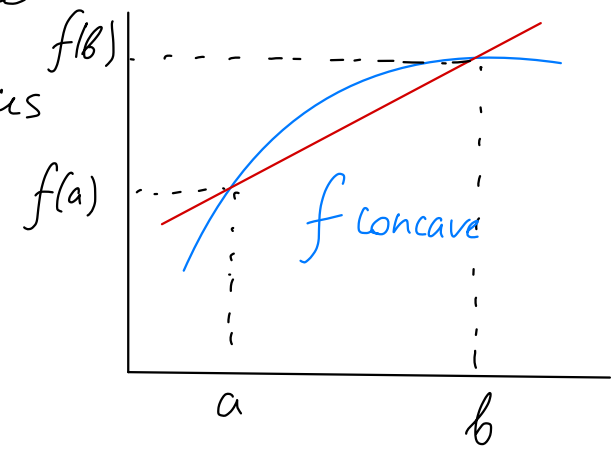
$\Rightarrow \Psi(x)$ change de signe en $x=a \Rightarrow (a, f(a))$ est un point d'inflexion



Déf. $f: I \rightarrow F$ est **convexe** sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve au dessous de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Déf. $f: I \rightarrow F$ est **concave** sur I si pour tout couple $a < b \in I$, le graphique de $f(x)$ se trouve au-dessus de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Proposition. Soit $f: I \rightarrow F$ deux fois dérivable sur I .

Alors f est convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f'(x)$ est croissante sur I
 f est concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f'(x)$ est décroissante sur I .

I dée:

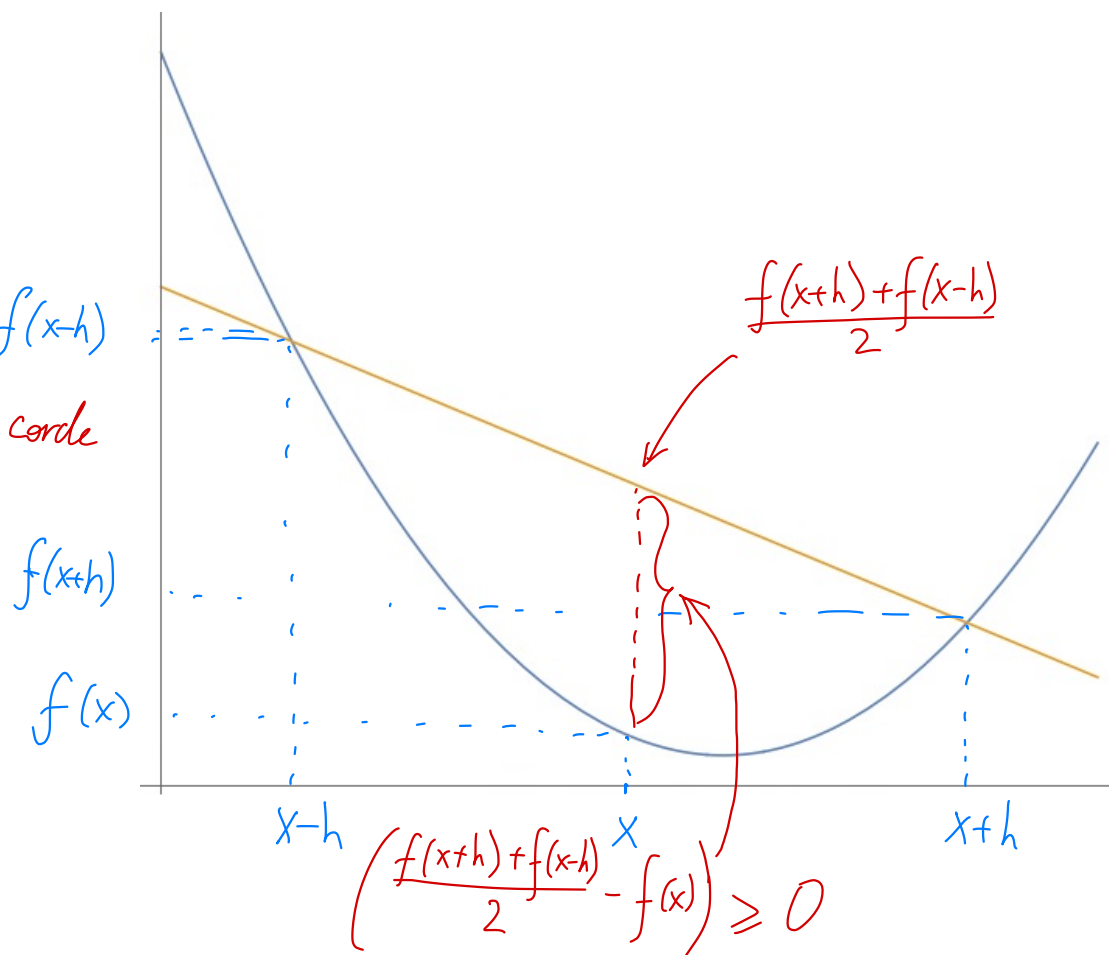
$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \quad " \approx "$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(2 \left(\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} - f(x) \right) \right)}{h^2} \begin{matrix} > 0 \text{ si} \\ \text{la fonction} \\ \text{est convexe: } f(x-h) \\ \text{au-dessous de la corde} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ est convexe
sur l'intervalle $I \ni x$.



Ex. DL pour $f(x) = \frac{1}{1-x}$? d'ordre n autour de $x=0$?
Soit $|x| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + \text{série géométrique.}$$

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^n}_{P_f^n(x)} + \underbrace{x^n \mathcal{E}(x)}_{\text{le reste}} = \underbrace{x^{n+1} + x^{n+2} + \dots}_{\text{le reste}} = x^{n+1} \underbrace{\left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right)}_{\frac{1}{1-x}}$$

$$\Rightarrow \text{le reste} = x^{n+1} \cdot \frac{1}{1-x} = x^n \mathcal{E}(x)$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{E}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \underbrace{x^n \cdot \frac{x}{1-x}}_{\text{le reste}}$$

est le DL de la fonction
 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ autour de $x=0$.
d'ordre $n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$